Лабораторна робота №2:

**«Моделювання однорідних ланцюгів Маркова з дискретним часом»**

**П.1. Означення ланцюга Маркова**

Нехай {\displaystyle I} — деяка скінченна чи зліченна [множина](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%BD%D0%B0" \o "Множина) елементи якої називаються станами. Нехай деяка динамічна система в момент часу n (де n=0, 1, 2, 3…) може перебувати в одному із цих станів, а в момент  n+1 перейти в деякий інший стан (чи залишитися в тому ж). Кожен такий перехід називається кроком. Кожен крок не є точно визначеним. З певними [ймовірностями](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%99%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C" \o "Ймовірність) система може перейти в один із станів. Якщо імовірності переходу залежать лише від моменту n і стану в якому перебуває процес в цей момент і не залежать від станів в яких процес перебував у моменти 0, 1, … , n-1 то такий процес називається (дискретним) ланцюгом Маркова.

Ланцюг Маркова повністю задається визначенням ймовірностей *p*i перебування процесу в стані {\displaystyle i\in I}  в момент n=0 і ймовірностей {\displaystyle p\_{ij}(n)}переходу зі стану {\displaystyle i\in I} в стан{\displaystyle j\in I} в момент n. Якщо ймовірності переходу не залежать від часу (тобто {\displaystyle p\_{ij}(n)} однакові для всіх n) то такий ланцюг Маркова називається однорідним. Саме однорідні ланцюги Маркова є найважливішими на практиці і найкраще вивченими теоретично. Формальне означення виглядає наступним чином:

**Означення 1.** Послідовність [дискретних](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%BB" \o "Дискретний розподіл) [випадкових величин](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%BF%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0" \o "Випадкова величина) {\displaystyle \{X\_{n}\}\_{n\geqslant 0}} називається ланцюгом Маркова (з дискретним часом), якщо



{\displaystyle \mathbb {P} (X\_{n+1}=i\_{n+1}\mid X\_{n}=i\_{n},X\_{n-1}=i\_{n-1},\ldots ,X\_{0}=i\_{0})=\mathbb {P} (X\_{n+1}=i\_{n+1}\mid X\_{n}=i\_{n})}Тобто майбутні значення послідовності залежать лише від теперішнього стану і не залежать від минулих.

**Означення 2**. [Матриця](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)" \o "Матриця (математика))  {\displaystyle P{(n)}}{\displaystyle P\_{ij}{(n)}\equiv \mathbb {P} (X\_{n+1}=j\mid X\_{n}=i)}називається **ма́трицею ймовірностей переходу** за один крок а [вектор](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80) {\displaystyle \mathbf {p} =(p\_{1},p\_{2},\ldots )^{\top }} де{\displaystyle p\_{i}\equiv \mathbb {P} (X\_{0}=i)} — **початковим розподілом** ланцюга Маркова.

{\displaystyle \sum \limits \_{j=1}^{\infty }P\_{ij}(n)=1,\quad \forall n\in \mathbb {N} }Ланцюг Маркова називається **однорідним** якщо:.

Ланцюг Маркова повністю визначається початковим розподілом і матрицею ймовірностей переходів за один крок.

Позначимо . Матриця називаеться **матрицею ймовірностей переходів за** *k* **кроків**.

Справедлива наступна рівність : Позначимоолоо

**П.2. Генерування значень однорідного Ланцюга Маркова.KfywЛ**

*{\displaystyle P\_{ij}{(n)}=P\_{ij},\quad \forall n\in \mathbb {N} }Вхідні дані до задачі* :

* Множина *І* можливих станів ланцюга Маркова;
* Початковий стан;
* Початковий розподіл: {\displaystyle \mathbf {p} =(p\_{1},p\_{2},\ldots )^{\top }} де;
* Матриця ймовірностей переходу за один крок.

*Результат моделювання* : послідовність *n* згенерованих станів ланцюга Маркова.

**Зауваження**. Оскільки динамічна система в конкретний момент часу перебуває лише в одному стані, то векторскладатиметься з однієї одиниці і решти нулів. Одиниця буде знаходитись на місці, що відповідає номеру початкового стану. Тобто якщо на початку система знаходилась в стані *k* :, то *k*-ий елемент вектора  буде одиницею, а решта нулями.

**Етап 1**. При множенні вектора на матрицю  ми одержимо вектор , елементи якого є ймовірностями: Отже, для одержання значення стану ланцюга Маркова в момент часу 1, нам потрібно згенерувати значення дискретної випадкової величини .

Причому, якщо початковий стан системи – це стан k, то, враховуючи сказане у зауваженні, ймовірності - це *k*-ий рядок матриці ймовірностей переходу. Позначимо одержане значення дискретної випадкової величини  через *l*.

**Етап 2**. Далі, для одержання значення наступного стану, візьмемо одержане значення *l* випадкової величини  в якості початкового стану, і у відповідності до цього змінимо початковий розподіл(тепер вже *l-*ий елемент вектора  буде 1, а решта нулями). Далі, генеруємо значення дискретної випадкової величини , для якої ймовірності  це числа, що знаходяться у *l-*му рядку матриці ймовірностей переходу . Одержане значення випадкової величини  - це і є стан нашої динамічної системи на другому кроці.

**…**

Повторюючи ці етапи далі одержимо послідовність значень випадкових величин , які і будуть відображати стани ланцюга Маркова в моменти часу 1,2,3,..,n

**Завдання до лабораторної роботи**

1. В коробці містяться 5 куль чорного і білого кольорів. Експеримент полягає в тому, що на кожному кроці з коробки навмання вибирають кулю і повертають у коробку кулю іншого кольору. Нехай -це кількість білих куль в коробці після першого, другого, третього,…експериментів. Дана послідовність випадкових величин є однорідним ланцюгом Маркова. Згенерувати 20 значень станів даного ланцюга Маркова, якщо спочатку в коробці було *т* білих куль.
2. В Чарівній країні Оз дуже специфічний клімат. Тут ніколи не буває двох ясних днів підряд. Якщо сьогодні ясно (Я), то завтра з однаковою ймовірністю може бути дощ (Д) чи сніг (С). Якщо сьогодні сніг (С) або дощ (Д), то з ймовірністю 0,5 погода не зміниться. Якщо погода зміниться то в половині випадків сніг замінюється дощем чи навпаки, і лише в половині випадків наступного дня буде ясна погода.

Нехай - стани погоди першого, другого, третього дня… Дана послідовність випадкових величин є однорідним ланцюгом Маркова.

Множина можливих станів : Я,С, Д. Згенерувати 20 значень станів для даного ланцюга Маркова.

1. Страхова компанія починає діяльність в момент часу  з активами у.о. На початку кожного року страхова компанія одержує в якості премій 2 у.о. А протягом року виплачує страхові компенсації, загальний обсяг яких описується таблицею:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Сума | 1 | 2 | 4 |
| ймовірність | 0,4 | 0,35 | 0,25 |

Якщо на кінець року активи компанії перевищують 3 у.о., то акціонерам виплачуються дивіденди на таку суму, щоб в результаті, активи компанії були рівні 3 у.о. Якщо активи компанії стають рівні нулю, то компанія банкротує і не може продовжувати діяльність.

Активи компанії у моменти часу 1, 2, 3 ,… - це випадкові величини . Дана послідовність утворює ланцюг Маркова. Множина можливих станів для даного ланцюга – це – 0 у.о., 1у.о, 2 у.о, 3 у.о.

Згенерувати можливі стани активів компанії протягом перших 10 років діяльності

**Завдання на додаткові бали** (*5 балів*): в завданні №3 обчислити ймовірність банкрутства компанії протягом перших 5 років.